第2講　点を回転する

2

［A］　複素数平面上で，△ABC の頂点を表す複素数を α，β，γ とする．α，β，γ が次の 3 条件を満たすとする．

1．△ABC は辺の長さ $\sqrt{3}$ の正三角形である

2．$\alpha+\beta+\gamma=3$

3．$\alpha\beta\gamma$ の絶対値は 1 で，虚数部分は正

このとき，次の問いに答えよ．

(1)　$z=\alpha-1$ とおいて，β と γ を z を使って表せ．

(2)　α，β，γ の偏角を求めよ．ただし，$0^\circ \leqq \arg\alpha \leqq \arg\beta \leqq \arg\gamma < 360^\circ$ とする．

［B］　平面上において，直線 l と，l 上にない点 A をとる．直線 l 上に点 B を線分 AB と直線 l が直交するようにとり，点 B を中心として直線 l を角度 θ だけ回転して得られる直線を m とする．直線 l 上にない点 P をとり，直線 l に関して P と対称な点 Q をとる．また点 A を中心として点 Q を角度 2θ だけ回転して得られる点を R とする．このとき線分 PR の中点 M は直線 m 上にあることを証明せよ．

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第2講　点を回転する

2　複素数平面上に四角形 ABCD があり，頂点 A，B，C，D は反時計回りに順に並んでいるものとし，4 点 A，B，C，D を表す複素数をそれぞれ z_1，z_2，z_3，z_4 とする．各辺を 1 辺とする 4 つの正方形 BAPQ，CBRS，DCTU，ADVW を四角形 ABCD の外側に作り，正方形 BAPQ，CBRS，DCTU，ADVW の中心をそれぞれ K，L，M，N とおく．

(1)　点 K を表す複素数 w_1 を z_1 と z_2 で表せ．

(2)　KM＝LN，KM⊥LN を証明せよ．

(3)　線分 KM と線分 LN の中点が一致するのは四角形 ABCD がどのような図形のときか．

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第２講　点を回転する

2

［A］ 複素数平面上で，△ABC の頂点を表す複素数を α，β，γ とする．α，β，γ が次の 3 条件を満たすとする．

1. △ABC は辺の長さ $\sqrt{3}$ の正三角形である
2. $\alpha+\beta+\gamma=3$
3. $\alpha\beta\gamma$ の絶対値は 1 で，虚数部分は正

このとき，次の問いに答えよ．

⑴ $z=\alpha-1$ とおいて，β と γ を z を使って表せ．

⑵ α，β，γ の偏角を求めよ．ただし，$0^\circ \leqq \arg\alpha \leqq \arg\beta \leqq \arg\gamma < 360^\circ$ とする．

［B］ 平面上において，直線 l と，l 上にない点 A をとる．直線 l 上に点 B を線分 AB と直線 l が直交するようにとり，点 B を中心として直線 l を角度 θ だけ回転して得られる直線を m とする．直線 l 上にない点 P をとり，直線 l に関して P と対称な点 Q をとる．また点 A を中心として点 Q を角度 2θ だけ回転して得られる点を R とする．このとき線分 PR の中点 M は直線 m 上にあることを証明せよ．

【答】［A］⑴ $\beta=z\left(-\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)+1$，$\gamma=z\left(-\dfrac{1}{2}\mp\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)+1$ （複号同順）

⑵ $\arg\alpha=20^\circ$，$\arg\beta=80^\circ$，$\arg\gamma=320^\circ$

［B］ 略

【解説】

［A］⑴ 条件 2. より $\dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{3}=1$．よって 1 は △ABC の重心である．このとき α から β，α から γ は 1 を中心に $\pm120^\circ$ 回転した点なので，以下すべて複号同順で

$$\begin{cases}\beta-1=(\alpha-1)(\cos(\pm120^\circ)+i\sin(\pm120^\circ))\\ \gamma-1=(\alpha-1)(\cos(\mp120^\circ)+i\sin(\mp120^\circ))\end{cases}$$

$$\therefore\ \begin{cases}\boldsymbol{\beta=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2}z+1}\\ \boldsymbol{\gamma=\dfrac{-1\mp\sqrt{3}\,i}{2}z+1}\end{cases}$$

⑵ 条件 1. より重心から各頂点までの距離は 1 であるから

$$|z|=1$$

よって

$$z=\cos\theta+i\sin\theta\quad(0^\circ\leqq\theta<360^\circ)$$

とおける．

⑴より $\beta\gamma=z^2-z+1$ となるので

$$\begin{aligned}\alpha\beta\gamma&=(z+1)(z^2-z+1)\\&=z^3+1\\&=\cos3\theta+1+i\sin3\theta\end{aligned}$$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

この複素数の絶対値が１で虚数部分が正より

$$(\cos 3\theta+1)^2+\sin^2 3\theta=1 \text{ かつ } \sin 3\theta>0$$

$$\Longleftrightarrow \quad \cos 3\theta=-\frac{1}{2} \text{ かつ } \sin 3\theta>0$$

$$\Longleftrightarrow \quad 3\theta=120^\circ,\ 480^\circ,\ 840^\circ$$

$$\therefore \quad \theta=40^\circ,\ 160^\circ,\ 280^\circ$$

このとき

$$z+1=1+\cos\theta+i\sin\theta$$
$$=2\cos\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}\right)$$

$\theta=40^\circ$ のとき

$$z+1=2\cos 20^\circ(\cos 20^\circ+i\sin 20^\circ)$$

$\theta=160^\circ$ のとき

$$z+1=2\cos 80^\circ(\cos 80^\circ+i\sin 80^\circ)$$

$\theta=280^\circ$ のとき

$$z+1=2\cos 140^\circ(\cos 140^\circ+i\sin 140^\circ)$$
$$=2\cos 40^\circ(\cos 320^\circ+i\sin 320^\circ)$$

上記の結果と対称性より

$$\mathbf{\arg\boldsymbol{\alpha}=20^\circ,\ \arg\boldsymbol{\beta}=80^\circ,\ \arg\boldsymbol{\gamma}=320^\circ}$$

［B］ B(0)，A(α)（α は純虚数；$\alpha+\overline{\alpha}=0$ かつ $\alpha\neq 0$）とおいても一般性は失われない．

$\omega=\cos\theta+i\sin\theta$ $(0\leqq\theta<\pi)$ とおくと

$$\omega^2=\cos 2\theta+i\sin 2\theta,$$
$$\overline{\omega}=\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)$$

である．P(z) とすると，Q を表す複素数は $\overline{z}$ となるので R を表す複素数は

$$(1-\omega^2)\alpha+\omega^2\overline{z}$$

となる．M は PR の中点より M を表す複素数は

$$\frac{(1-\omega^2)\alpha+\omega^2\overline{z}+z}{2}$$

であり，この点を B(0) を中心に $-\theta$ 回転した点を表す複素数は

$$\frac{(1-\omega^2)\alpha+\omega^2\overline{z}+z}{2}\times\overline{\omega}$$

$$=\frac{1}{2}\{(\overline{\omega}-\omega)\alpha+\omega\overline{z}+\overline{\omega}z\} \quad \cdots\cdots①$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

ここで

$$\begin{aligned}
&\overline{(\overline{\omega}-\omega)\alpha+\omega\overline{z}+\overline{\omega}z}\\
&=(\omega-\overline{\omega})\overline{\alpha}+\overline{\omega}z+\omega\overline{z}\\
&=(\omega-\overline{\omega})(-\alpha)+\overline{\omega}z+\omega\overline{z}\quad(\overline{\alpha}=-\alpha\text{ より})\\
&=(\overline{\omega}-\omega)\alpha+\omega\overline{z}+\overline{\omega}z
\end{aligned}$$

より①は実数であるので，M が m 上にあることが示された.

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第２講　点を回転する

[2] 複素数平面上に四角形 ABCD があり，頂点 A，B，C，D は反時計回りに順に並んでいるものとし，4 点 A，B，C，D を表す複素数をそれぞれ z_1，z_2，z_3，z_4 とする．各辺を１辺とする４つの正方形 BAPQ，CBRS，DCTU，ADVW を四角形 ABCD の外側に作り，正方形 BAPQ，CBRS，DCTU，ADVW の中心をそれぞれ K，L，M，N とおく．

(1) 点 K を表す複素数 w_1 を z_1 と z_2 で表せ．

(2) KM＝LN，KM⊥LN を証明せよ．

(3) 線分 KM と線分 LN の中点が一致するのは四角形 ABCD がどのような図形のときか．

【答】 (1) $w_1=\dfrac{1+i}{2}z_1+\dfrac{1-i}{2}z_2$　(2) 略　(3) 平行四辺形のとき

【解説】

(1) Q(z) とすると

$$z-z_2=(z_1-z_2)\times i \iff z=iz_1+(1-i)z_2$$

ゆえに

$$\begin{aligned} w_1&=\frac{1}{2}(z+z_1)\\ &=\boldsymbol{\frac{1+i}{2}z_1+\frac{1-i}{2}z_2} \end{aligned}$$

(2) L(w_2)，M(w_3)，N(w_4) とすると，(1)と同様に

$$w_2=\frac{1+i}{2}z_2+\frac{1-i}{2}z_3$$

$$w_3=\frac{1+i}{2}z_3+\frac{1-i}{2}z_4$$

$$w_4=\frac{1+i}{2}z_4+\frac{1-i}{2}z_1$$

となる．ここで，

$$\begin{aligned} &w_3-w_1\\ &=-\frac{1+i}{2}z_1-\frac{1-i}{2}z_2+\frac{1+i}{2}z_3+\frac{1-i}{2}z_4\\ &=-i\left(\frac{1-i}{2}z_1-\frac{1+i}{2}z_2-\frac{1-i}{2}z_3+\frac{1+i}{2}z_4\right)\\ &=-i(w_4-w_2) \end{aligned}$$

となるので

KM＝LN かつ KM⊥LN

が示された．

(3)

$$\frac{w_1+w_3}{2}=\frac{w_2+w_4}{2}$$
$$\Longleftrightarrow\quad w_1-w_2+w_3-w_4=0$$
$$\Longleftrightarrow\quad iz_1-iz_2+iz_3-iz_4=0$$
$$\Longleftrightarrow\quad \frac{z_1+z_3}{2}=\frac{z_2+z_4}{2}$$

よって AC と BD の中点が一致する場合，すなわち**平行四辺形のとき**.

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。